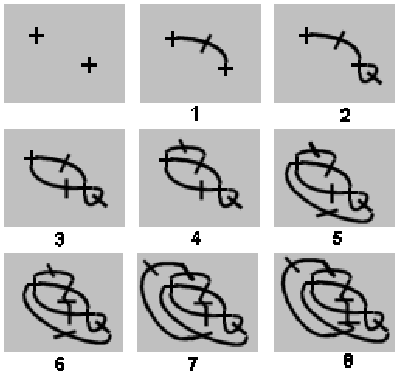
Projektkurs Mathematik an der Gesamtschule Hattingen in Kooperation mit der Ruhr-Universität Bochum

(Bei-)Spiel *Brussels Sprouts*



Im Folgenden wird am Spiel *Brussels Sprouts* beschrieben, wie die Lernenden von der „naiven“ Spieltätigkeit über die Analyse der Spielstrategie hin zum Einblick in ein mathematisches Feld (hier: Graphentheorie) gelangen können.
Spielfeld: *n* Kreuze auf einem Blatt Papier
So geht das Spiel:
Man verbindet ein freies Ende eines Kreuzes mit einem anderen oder kehrt zum selben zurück. Anschließend zeichnet man auf die gezeichnete Linie ein Kreuz (eine kurze Linie).
Regeln:
1. Die Verbindungslinien dürfen jede Form haben, jedoch weder eine andere Linie noch sich selbst schneiden oder durch ein Kreuz hindurch gehen. Sie müssen immer bei einem Kreuz anfangen und bei einem Kreuz enden.
2. Von keinem Kreuz dürfen mehr als 4 Linien ausgehen.

Spielende: Es gewinnt, wer als letztes eine Linie zeichnen kann.
Im Anschluss an eine Runde freien Spielens sind die Schüler*innen schnell in der Lage, die Antwort auf die *Ausgangsfrage, wie viele Spielzüge m vorhersagbar* sind, zu geben, und finden den Zusammenhang mit den Anfangskreuzen *n* als $m = 5n - 2$.

Die Beantwortung der folgenden Fragen führt zur Analyse des Spiels:
1. Wie ist der Zusammenhang zwischen der Anzahl der *Spielzüge m* und der Anzahl der *Linien L (Kanten)*? $|L| = 2\ m$
2. Wie kann man die Anzahl der *Kreuze K (Knoten)* in einem Spiel voraussagen?
$|K| = m + n$
3. Wie viele *Flächen F* gibt es am Ende des Spiels? Zähle die äußere Fläche mit!
$|F| = 4n$

Aus Sicht der Hochschulmathematik erhält man am Ende jedes „Brussels Sprout“- Spiels einen sogenannten *planaren Graphen*. Ein *planarer Graph* beschreibt Punkte in einer Ebene, die durch Kanten verbunden sind, die sich nicht schneiden. Eine Besonderheit von planaren Graphen ist der Zusammenhang zwischen der Anzahl ihrer Knoten, Kanten und Flächen, den die Eulersche Polyederformel angibt:
$|K| - |L| + |L| = 2$

Durch die Anwendung der Polyederformel können die Schüler*innen des Projektkurses den zu Beginn gefundenen Zusammenhang $m = 5n - 2$ herleiten.
Sie vertiefen im Anschluss ihre Kenntnisse im mathematischen Feld Graphentheorie durch Betrachtung des sog. *Vier-Farben-Theorems*, dass aussagt, dass man lediglich vier Farben benötigt, um jede beliebige Landkarte einzufärben, ohne das angrenzende Länder dieselbe Farbe haben. Durch den Ausblick auf außermathematische Anwendungen wie die Einteilung landwirtschaftlicher Nutzflächen oder die Platzierung von Mobilfunk-Sendetürmen wird den

Teilnehmern des Projektkurses exemplarisch der Nutzen mathematischen Grundlagenwissens in den Studiengängen der Natur- und Ingenieurswissenschaften verdeutlicht. Im weiteren Verlauf des Kurses wird die Polyederformel wieder aufgegriffen und mit Hilfe der mathematischen Beweismethode der Vollständigen Induktion bewiesen.